

Cursul 15: Inducția electromagnetică. Autoinducția și circuitul RL

În Cursul 12 am scris sistemul complet al ecuațiilor lui Maxwell:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

și ne-am oprit, mai ales, asupra primelor două: sursele câmpului electric și absența lor pentru câmpul magnetic. A treia ecuație, $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, a rămas însă exact atât cât încap într-o cutie: am scris-o, am numit-o legea lui Faraday, și am trecut mai departe spre unda electromagnetică. Ce anume spune ea despre lumea reală - de ce se aprinde un bec la o dinamo de bicicletă, de ce zumzăie un transformator, de ce o bobină “ține” curentul câteva zecimi de secundă după ce întrerupem sursa - nu am discutat nicăieri. Legea inducției a lui Faraday a apărut o singură dată în tot cursul, ca simplă notă istorică despre anul 1831 (Cursul 5), iar cuvintele “autoinducție” și “transformator” nu au apărut niciodată.

Acest curs încheie exact acest gol, și o face pornind riguros de la ceea ce știm deja: aceeași ecuație $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, aceeași teoremă a lui Stokes din Cursul 3, același algoritm al căderilor de tensiune din Cursul 14. Arătăm întâi ce înseamnă legea lui Faraday ca fenomen fizic și de ce semnul ei minus este o lege de conservare a energiei deghizată (legea lui Lenz); construim apoi tensiunea electromotoare de mișcare, generatorul electric în forma lui cea mai simplă; introducem autoinducția, proprietatea unei bobine de a se opune propriei ei variații de curent, și rezolvăm circuitul RL exact așa cum am rezolvat circuitul RC în Cursul 14, cu un contrast fizic izbitor între cele două; și încheiem cu transformatorul, motivul pentru care rețeaua electrică mondială funcționează în curent alternativ. La capătul acestui drum, cele patru ecuații ale lui Maxwell nu mai sunt patru simboluri într-o cutie, ci patru fenomene pe care le putem construi, măsura și folosi.

Legea inducției a lui Faraday: fluxul magnetic și tensiunea electromotoare indusă

În vara anului 1831, Michael Faraday a înfășurat două bobine de sârmă pe părțile opuse ale unui inel de fier, a legat una la o baterie și cealaltă la un galvanometru, și s-a așteptat ca un curent staționar prin prima bobină să întrețină un curent staționar și prin a doua. Nu s-a întâmplat așa. Acul galvanometrului a stat nemișcat cât timp curentul din prima bobină era constant și a tresărit doar în clipa în care Faraday închidea sau deschidea circuitul - adică exact atunci când curentul, și odată cu el câmpul magnetic produs, *se schimba*. Faraday a descoperit astfel că nu câmpul magnetic în sine, ci **variația** lui în timp, este cea care pune sarcina în mișcare într-un circuit vecin, fără nicio baterie și fără niciun contact fizic între cele două bobine.

Fluxul magnetic

Mărima care contează este **fluxul magnetic** prin circuit, definit la fel ca fluxul oricărui alt câmp de vectori (Cursul 2), aplicat acum lui $\vec{B}$: pentru o suprafață deschisă S mărginită de conturul circuitului, cu normala $\hat{n}$,

$$\Phi_B \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS,$$

măsurat în weberi, $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$. Pentru o buclă plană de arie A într-un câmp uniform care face unghiul θ cu normala, relația se reduce, ca și la fluxul electric, la $\Phi_B = BA \cos \theta$: maxim atunci când bucla “privește” direct spre câmp, nul atunci când stă cu fața paralelă cu el.

Fluxul Φ_B se poate schimba în exact trei moduri, iar legea lui Faraday, așa cum urmează să o scriem, nu distinge deloc între ele: câmpul $\vec{B}$ poate crește sau scădea în timp cu bucla nemișcată; aria A a circuitului se poate modifica; sau bucla se poate roti, astfel încât unghiul θ să varieze. Primul mecanism stă la baza transformatorului, celelalte două la baza generatorului electric - le regăsim pe amândouă mai jos, dar toate trei sunt, pentru legea lui Faraday, un singur și același lucru: o variație a lui Φ_B .

Legea lui Faraday și legătura ei cu Cursul 12

Distilată din zeci de experimente ca cel de mai sus, legea inducției electromagnetice a lui Faraday spune că tensiunea electromotoare indusă în circuit este exact rata de variație a fluxului magnetic prin el:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

iar pentru o bobină cu N spire identice, fiecare spiră contribuie cu propriul ei flux, deci $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$. Tensiunea electromotoare $\mathcal{E}$ este exact mărimea cu acest nume din Cursul 14: lucrul mecanic efectuat asupra unității de sarcină de-a lungul circuitului. Diferența este că, de data aceasta, nu există nicio baterie, nicio reacție chimică, niciun agent material care să “împingă” sarcina - singura sursă a tensiunii electromotoare este câmpul magnetic care se schimbă.

Ce înseamnă $\mathcal{E}$ atunci când nicio sarcină nu se mișcă macroscopic și nicio sursă chimică nu există? Înseamnă că a apărut, cu adevărat, un câmp electric, doar că unul de un fel nou: nu unul care pornește radial din sarcini, ca $\vec{E}$ electrostatic, ci unul care se **închide în cerc** în jurul fluxului care variază. Scriind $\mathcal{E}$ ca circulație a acestui câmp de-a lungul conturului Γ - exact circulația $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ din Cursul 1, dar acum nenulă -, legea lui Faraday devine

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Contrastul cu electrostatica este exact și izbitor. Câmpul electrostatic al unor sarcini imobile are circulație nulă pe orice contur închis (Cursul 1) - tocmai de aceea a putut fi definit un potențial V , o singură valoare pentru fiecare punct al spațiului. Aici, această proprietate se rupe: circulația lui $\vec{E}$ pe conturul Γ nu mai este zero atunci când fluxul prin Γ variază, deci acest $\vec{E}$ nu mai este gradientul niciunui potențial - nu mai putem atribui o singură tensiune bine definită unei regiuni în care fluxul magnetic se schimbă. Aplicăm teorema lui Stokes (Cursul 3) în locul ei natural, cu $\vec{A} = \vec{E}$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot \hat{n} dS,$$

și egalăm cele două expresii ale circulației, valabile pentru orice suprafață S mărginită de Γ :

$$\iint_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \implies \boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Aceasta este exact a treia ecuație a lui Maxwell scrisă în Cursul 12: un câmp magnetic care variază în timp este o sursă de rotor pentru câmpul electric. Am pornit de la un experiment de laborator din 1831 și am ajuns, prin aceeași teoremă a lui Stokes care în Cursul 3 transforma $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ în $\text{rot } \vec{E} = 0$, la simbolul care stătea, nedevoltat, în cutia Cursului 12.

Teorema lui Stokes: circulația pe contur = suma rotoarelor

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Figura 1: c12 stokes

Legea lui Lenz: semnul minus ca lege de conservare a energiei

Semnul minus din legea lui Faraday nu este un detaliu de convenție, ci toată morala capitolului, iar Heinrich Lenz i-a dat un nume: **curentul indus curge întotdeauna în sensul care se opune variației de flux care l-a produs**. Dacă fluxul printr-o buclă crește, curentul indus își creează propriul câmp magnetic, orientat *invers*, care luptă împotriva creșterii; dacă fluxul scade, curentul indus își creează un câmp care încearcă să îl susțină. Natura rezistă la orice schimbare a fluxului magnetic, iar curentul indus este chiar această rezistență.

Regula nu este arbitrară, ci o cerință directă a conservării energiei, iar cel mai simplu experiment o face evidentă. Împingem un magnet, cu polul nord înainte, către o bobină: fluxul prin bobină crește, iar curentul indus își creează un câmp propriu care transformă fața apropiată a bobinei tot într-un pol nord, respingând magnetul. Simțim direct această respingere, ca pe o rezistență mecanică. Pentru a continua să apropiem magnetul trebuie să efectuăm lucru mecanic împotriva acestei respingeri, iar acest lucru mecanic este exact energia electrică ce apare în bobină, disipată în rezistența ei sau livrată circuitului exterior. Presupunem, pentru o clipă, că semnul ar fi fost invers - că bobina ar fi *atras* magnetul, nu l-ar fi respins. Atunci magnetul ar fi accelerat singur spre bobină, fără niciun efort din exterior, inducând un curent tot mai mare, care l-ar atrage tot mai tare, la nesfârșit: o mașină care produce energie din nimic. Semnul minus este exact interdicția naturii asupra acestui “prânz gratuit”.

Legea lui Lenz este, în același timp, un instrument practic: de câte ori trebuie stabilit *sensul* unui curent indus, e suficient să găsim sensul care se opune variației fluxului - crescând sau scăzând - și acela este răspunsul, fără să mai fie nevoie de niciun calcul suplimentar de semn.

Tensiunea electromotoare de mișcare: tija pe șine

Există un al doilea mod, complementar celui de mai sus, de a schimba fluxul printr-un circuit: nu schimbând câmpul, ci mișcând circuitul însuși prin el, iar acest mod ne permite să vedem inducția dintr-un unghi complet diferit și mult mai fizic. Așezăm două șine paralele, la distanța l una de alta, într-un câmp uniform $\vec{B}$ orientat perpendicular pe planul lor (spre interiorul paginii), le legăm la un capăt printr-un rezistor R , și punem o tijă conductoare să alunece liber pe șine, perpendicular pe ele, cu viteza v .

Pentru a obține tensiunea electromotoare fără să trecem deloc prin legea lui Faraday, avem nevoie de jumătatea poveștii pe care Cursul 12 nu a scris-o explicit: cum împinge un câmp magnetic o sarcină

aflată în mișcare. Experimental, forța resimțită de o sarcină q ce se mișcă cu viteza $\vec{v}$ printr-un câmp $\vec{B}$ este

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

perpendiculară deopotrivă pe $\vec{v}$ și pe $\vec{B}$, de modul $F = qvB \sin \theta$; este chiar definiția operațională a lui $\vec{B}$ și, fiind mereu perpendiculară pe viteza pe care o deviază, nu efectuează niciodată lucru mecanic asupra sarcinii libere asupra căreia acționează. Fiecare purtător de sarcină liber q din tijă se mișcă odată cu ea, cu viteza $\vec{v}$, perpendiculară pe $\vec{B}$, deci resimte forța $q\vec{v} \times \vec{B}$, de modul qvB , orientată de-a lungul tijei. Această forță împinge sarcina pozitivă spre un capăt al tijei și lasă celălalt capăt negativ, exact ca o baterie construită chiar în interiorul tijei. Lucrul mecanic efectuat de această forță, pe unitatea de sarcină, la deplasarea sarcinii de-a lungul întregii lungimi l a tijei, este forța pe unitatea de sarcină (vB) înmulțită cu distanța (l):

$$\mathcal{E} = Blv$$

Verificăm rezultatul cu legea fluxului. Într-un interval dt , tija înaintază cu $v dt$, deci aria buclei crește cu $lv dt$ și fluxul ei cu $d\Phi_B = Blv dt$. Legea lui Faraday dă atunci $|\mathcal{E}| = d\Phi_B/dt = Blv$ - același răspuns, obținut pe două căi complet diferite: forța magnetică asupra unor sarcini în mișcare, și rata de variație a fluxului.

Contabilitatea energiei închide cercul și arată de ce acesta este un generator electric în miniatură. Tensiunea electromotoare pune în mișcare un curent $I = Blv/R$ prin circuit. Acest curent, parcurgând tija aflată chiar în câmpul $\vec{B}$, face ca tija să resimtă o forță $F = BIl = B^2 l^2 v/R$ care, conform legii lui Lenz, este îndreptată *împotriva* mișcării. Pentru a menține tija la viteză constantă trebuie să furnizăm continuu putere mecanică împotriva acestei forțe,

$$P_{\text{mec}} = Fv = \frac{B^2 l^2 v^2}{R},$$

exact egală cu puterea electrică disipată în rezistor, $P_{\text{el}} = I^2 R = (Blv/R)^2 R = B^2 l^2 v^2 / R$. Fiecare watt de efort mecanic devine, fără pierdere, un watt de energie electrică. O centrală electrică nu este, în esență, altceva decât această tijă și aceste șine, la scară industrială: aburul, apa căzătoare sau vântul efectuează lucru mecanic pentru a mișca un conductor printr-un câmp magnetic, iar acel lucru mecanic iese, pe fir, ca energie electrică.

Exemplu: tija pe șine

Date: o tijă conductoare de lungime $l = 0,4$ m alunecă pe două șine orizontale, cu viteza $v = 5$ m/s, într-un câmp magnetic uniform $B = 0,6$ T perpendicular pe planul șinelor. Șinele sunt închise printr-un rezistor $R = 3 \Omega$.

Cerință: tensiunea electromotoare indusă, curentul prin circuit, puterea disipată în rezistor, și forța mecanică necesară pentru a menține tija în mișcare.

Rezolvare: tensiunea electromotoare este

$$\mathcal{E} = Blv = (0,6)(0,4)(5) = 1,2 \text{ V},$$

curentul indus

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1,2}{3} = 0,4 \text{ A},$$

iar puterea disipată în rezistor

$$P = I^2 R = (0,4)^2 (3) = 0,48 \text{ W}.$$

Forța care se opune mișcării tijei este $F = BIl = (0,6)(0,4)(0,4) = 0,096$ N, deci puterea mecanică necesară pentru a menține viteza constantă este $P_{\text{mec}} = Fv = (0,096)(5) = 0,48$ W - identică cu puterea electrică disipată. Verificarea încrucișată confirmă legea lui Lenz: tot lucrul mecanic depus se regăsește, integral, ca energie electrică.

$$\mathcal{E} = 1,2 \text{ V}, \quad I = 0,4 \text{ A}, \quad P = 0,48 \text{ W}$$

Merită observată o subtilitate, pentru că spune ceva profund despre legea fluxului. La tija pe șine, tensiunea electromotoare a venit din forța magnetică $q\vec{v} \times \vec{B}$ asupra unor sarcini purtate printr-un câmp *static*: $\vec{B}$ nu s-a schimbat nicio clipă în timp, și nu a fost nevoie de niciun câmp electric indus. La bobina lui Faraday, dimpotrivă, circuitul a stat pe loc și câmpul s-a schimbat, iar acolo tensiunea electromotoare a venit dintr-un câmp electric indus real, cel din $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ de mai sus. Sunt două mecanisme fizic distincte - unul magnetic, celălalt electric -, și totuși o singură formulă, $\mathcal{E} = -d\Phi_B / dt$, le prinde pe amândouă, cu același răspuns de fiecare dată. Nu este o coincidență întâmplătoare, ci un prim semn al unității mai adânci dintre câmpul electric și cel magnetic, pe care teoria relativității avea să o confirme mai târziu: ceea ce numim “electric” sau “magnetic” depinde de sistemul de referință din care privim aceleași sarcini în mișcare.

Autoinducția: inductanța proprie a unei bobine

Un curent care variază produce un câmp magnetic care variază, iar un câmp magnetic care variază induce o tensiune electromotoare - deci o bobină parcursă de un curent variabil induce o tensiune electromotoare *chiar în ea însăși*. Acest fenomen de **autoinducție** este analogul magnetic al capacității electrice și înzestrează orice bobină cu un fel de inerție electrică. Fluxul total pe care o bobină îl înlanțuie prin propriile ei N spire este proporțional cu propriul ei curent,

$$N\Phi_B = LI,$$

iar constanta de proporționalitate L , numită **inductanța proprie** (sau autoinductanța) a bobinei, depinde exclusiv de geometria ei - de formă, de numărul de spire - niciodată de curent. Derivând în raport cu timpul și folosind legea lui Faraday pentru cele N spire, $\mathcal{E} = -N d\Phi_B / dt = -L dI / dt$:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

Unitatea de măsură a lui L este henry-ul, $1 \text{ H} = 1 \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}$. Semnul minus este tot legea lui Lenz, aplicată acum bobinei asupra ei înseși: o bobină se opune oricărei variații a propriului ei curent, frânând o creștere și susținând o scădere - motivul pentru care, așa cum vedem mai jos, curentul printr-o bobină nu poate “sări” instantaneu de la o valoare la alta.

Inductanța unui solenoid

Cel mai curat exemplu de calcul al lui L este solenoidul: o bobină lungă, înfășurată strâns, cu n spire pe unitatea de lungime. Cursul 12 a găsit deja câmpul pe axa unei singure spire de rază R ,

$$B(z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

și a arătat că, pentru N spire suprapuse în același loc, valoarea se înmulțește cu N .

Înșirând acum spirele nu în același loc, ci de-a lungul unei axe lungi, umerii câmpului fiecărei spire se suprapun cu ai vecinilor ei, iar în interiorul solenoidului câmpul devine aproape uniform - exact așa cum mai multe valuri apropiate se contopesc într-o singură ridicătură netedă de apă. Pentru a găsi valoarea exactă a acestui câmp uniform e mai simplu să folosim forma integrală a legii lui Ampère decât să însumăm câmpurile tuturor spirelor. Ecuația a patra a lui Maxwell (Cursul 12), pentru un curent staționar (fără câmp electric variabil, deci fără termenul de deplasare), se reduce la $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$; aplicând teorema lui Stokes (Cursul 3) exact ca mai sus, dar lui $\vec{B}$ în loc de $\vec{E}$, obținem forma ei integrală,

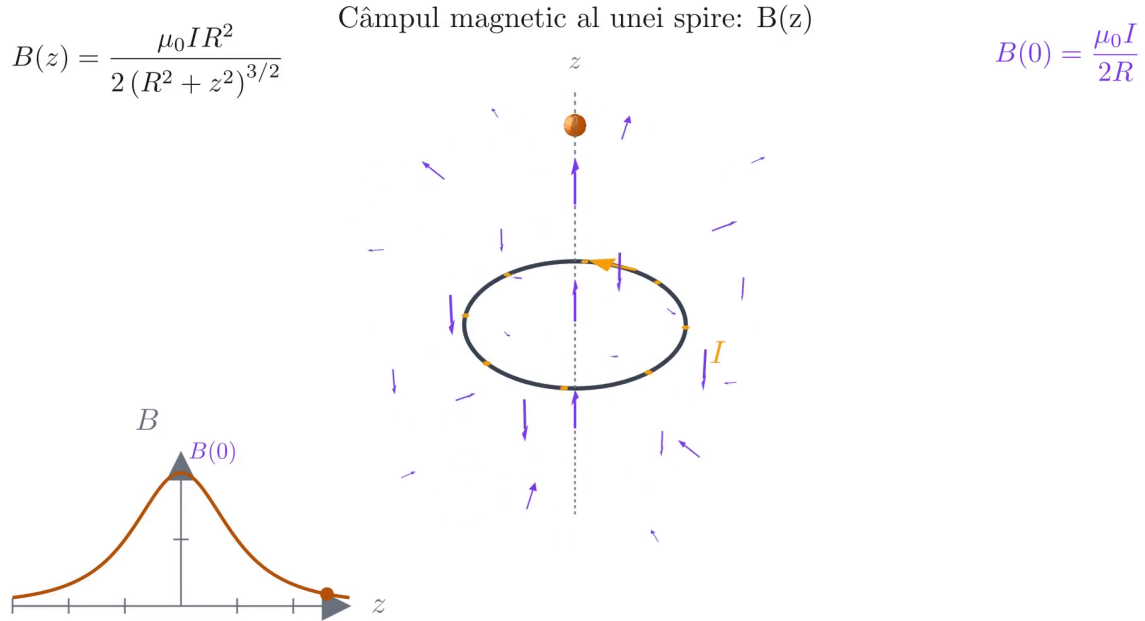


Figura 2: c12 camp spira B z

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{int}}.$$

Alegem un contur dreptunghiular Γ , cu o latură de lungime Δx adânc în interiorul solenoidului, paralelă cu axa, și latura opusă în exterior, unde câmpul unui solenoid lung este neglijabil; laturile perpendiculare pe axă nu contribuie deloc, fiind fie perpendiculare pe $\vec{B}$ în interior, fie situate într-o regiune cu $\vec{B} \approx 0$ în exterior. Circulația se reduce, deci, la un singur termen, $B \Delta x$, produs chiar de latura interioară. Conturul înlănțuie exact spirele cuprinse pe lungimea Δx , adică $n \Delta x$ spire, fiecare cu curentul I , deci $I_{\text{int}} = n \Delta x I$. Legea lui Ampère devine $B \Delta x = \mu_0 n \Delta x I$, de unde

$$B = \mu_0 n I$$

uniform, orientat de-a lungul axei, independent de poziția din interiorul secțiunii - acesta este câmpul din interiorul oricărui electromagnet sau bobinaj de laborator. Fluxul printr-o singură spirală de arie A este atunci $\Phi_B = BA = \mu_0 n I A$, iar o lungime ℓ de solenoid, cu $N = n\ell$ spire, înlănțuie fluxul total $N\Phi_B = (n\ell)(\mu_0 n I A) = \mu_0 n^2 (A\ell) I$. Împărțind la I :

$$L = \mu_0 n^2 (A\ell)$$

proporțională cu volumul $A\ell$ al bobinajului și cu *pătratul* densității de spire: înfășurând spirele de două ori mai des, inductanța crește de patru ori - o dată pentru că fiecare spirală produce un câmp mai intens, o dată pentru că sunt mai multe spire care înlănțuie acel câmp.

Energia înmagazinată în câmpul magnetic

Cursul 7 a arătat că încărcarea unui condensator costă energia $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$, înmagazinată în câmpul electric dintre armături. Stabilirea unui curent într-o bobină costă, la fel, energie, înmagazinată acum în câmpul ei magnetic. Cât timp curentul crește, bobina se opune cu $\mathcal{E} = -L dI/dt$, iar sursa care învinge această opoziție livrează puterea $P = |\mathcal{E}| I = L I \frac{dI}{dt}$. Integrând de la curent nul până la valoarea finală I ,

$$W_{\text{mag}} = \int_0^I L I' dI' = \frac{1}{2} L I^2$$

perechea magnetică exactă a energiei $\frac{1}{2}CU^2$ a condensatorului: acolo unde bobina și condensatorul diferă complet ca formă și ca fizică microscopică, formulele lor de energie au aceeași structură matematică, un pătrat al mărimii care le caracterizează (curent, respectiv tensiune), înmulțit cu jumătate din constanta lor geometrică.

Circuitul RL: stabilirea și întreruperea curentului

Cursul 14 a scris, pentru orice element întâlnit de-a lungul unui drum $A \rightarrow B$ dintr-un circuit, câte o “rețetă” pentru căderea de tensiune: sursă, rezistor, condensator. Adăugăm acum a patra rețetă, pentru o bobină parcursă de curentul I (crescător, în sensul $A \rightarrow B$):

$$V_A - V_B = +L \frac{dI}{dt},$$

exact semnul așteptat de la legea lui Lenz: bobina “cade” în tensiune în sensul care se opune creșterii curentului. Cu această rețetă, legea a doua a lui Kirchhoff (Cursul 14), $\sum_{\text{ochi}} (\text{căderi de tensiune}) = 0$, se aplică unui circuit RL exact așa cum s-a aplicat circuitului RC.

Stabilirea curentului

Considerăm o sursă ideală de tensiune electromotoare $\mathcal{E}$, un întrerupător k , un rezistor R și o bobină L , toate în serie. La momentul $t = 0$ închidem întrerupătorul; înainte de acest moment nu a curs niciun curent prin bobină, deci $I(0) = 0$. Legea a doua a lui Kirchhoff pe buclă, cu rețetele de mai sus pentru rezistor și bobină, dă ecuația circuitului, valabilă în orice moment $t > 0$:

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{\mathcal{E}}{R} \right).$$

Este exact aceeași structură de relaxare exponențială întâlnită la circuitul RC (Cursul 14): o mărime - acolo U_C , aici I - se apropie exponențial de o valoare-țintă - acolo $\mathcal{E}$, aici $\mathcal{E}/R$ -, cu o viteză proporțională chiar cu distanța rămasă până la țintă. Separând variabilele și integrând de la 0 la t , cu $I(0) = 0$:

$$\int_0^I \frac{dI'}{I' - \mathcal{E}/R} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt' \quad \Rightarrow \quad \ln \left(\frac{I - \mathcal{E}/R}{-\mathcal{E}/R} \right) = -\frac{R}{L} t,$$

de unde, ridicând la exponențială și rearanjând,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-tR/L})$$

Constanta de timp a circuitului este $\tau = L/R$ (verificare dimensională: $[L]/[R] = (\text{V} \cdot \text{s}/\text{A})/(\text{V}/\text{A}) = \text{s}$, corect). La $t = 0$, curentul e nul, iar bobina se comportă exact ca un circuit *întrerupt*: orice tendință de a-l face să sară brusc la o valoare finită este exact ceea ce autoinducția interzice. Pe măsură ce timpul trece, opoziția bobinei scade, curentul crește, iar $I(t)$ se apropie asimptotic de valoarea finală $\mathcal{E}/R$, la care $dI/dt = 0$ și bobina nu mai cade nicio tensiune - se comportă, în regim staționar, ca un simplu fir conductor. Energia $\frac{1}{2}LI^2$ calculată mai sus este chiar energia înmagazinată, în orice moment al acestui proces, în câmpul magnetic al bobinei; restul energiei livrate de sursă se disipă în R .

Acest comportament este exact oglinda circuitului RC, și merită spus explicit. Un condensator descărcat, la $t = 0$, permite curentul maxim, ca și cum ar fi un simplu fir (scurtcircuit); complet încărcat, la $t \rightarrow \infty$, nu mai permite deloc curent, ca un circuit întrerupt. O bobină face exact invers: la $t = 0$ se comportă ca un circuit întrerupt, iar la $t \rightarrow \infty$, ca un simplu fir. Condensatorul și bobina sunt, în acest sens precis, elemente *duale* una față de cealaltă.

Înteruperea curentului

Odată stabilit curentul $I_0 = \mathcal{E}/R$ în regim staționar, scoatem sursa din circuit (de exemplu, printr-o a doua poziție a lui k , care scurtcircuitază direct rezistorul și bobina). Bucla rămasă conține doar R și L : bobina, acționând acum ea însăși ca sursă, împinge curentul prin R , iar legea a doua a lui Kirchhoff dă

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I.$$

Separând și integrând, cu $I(0) = \mathcal{E}/R$:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-tR/L}$$

cu aceeași constantă de timp $\tau = L/R$. După exact un τ , curentul de stabilire a acoperit $1 - e^{-1} \approx 0,63$ din drumul până la valoarea finală, iar curentul de întrerupere a coborât la $e^{-1} \approx 0,37$ din valoarea inițială - același ritm, procentual, ca la circuitul RC. După aproximativ 5τ , regimul tranzitoriu poate fi considerat, în orice scop practic, încheiat.

Exemplu: constanta de timp a unui circuit RL

Date: o bobină cu inductanța $L = 0,6$ H se leagă în serie cu un rezistor $R = 15 \Omega$ și o sursă cu $\mathcal{E} = 9$ V (rezistență internă neglijabilă). La $t = 0$ se închide întrerupătorul.

Cerință: (a) constanta de timp τ a circuitului; (b) curentul prin circuit la momentul $t = \tau$; (c) după cât timp curentul atinge 95% din valoarea sa finală?

Rezolvare: (a)

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,6}{15} = 0,04 \text{ s} = 40 \text{ ms}.$$

(b) curentul final este $I_{\max} = \mathcal{E}/R = 9/15 = 0,6$ A, deci, indiferent de valorile particulare ale lui L și R (regula generală a constantei de timp),

$$I(\tau) = I_{\max} (1 - e^{-1}) = 0,6 \times 0,632 \approx 0,38 \text{ A}.$$

(c) punem condiția $I(t) = 0,95 I_{\max}$:

$$1 - e^{-t/\tau} = 0,95 \implies e^{-t/\tau} = 0,05 \implies t = \tau \ln 20 = 0,04 \times 2,996 \approx 0,12 \text{ s} = 120 \text{ ms},$$

adică aproape exact 3τ .

$$\tau = 40 \text{ ms}, \quad I(\tau) \approx 0,38 \text{ A}, \quad t_{95\%} \approx 120 \text{ ms}$$

Dacă, o dată stabilit acest curent staționar, circuitul ar fi întrerupt prin scurtcircuitarea sursei, constanta de timp ar rămâne $\tau = L/R = 40$ ms, iar după un τ curentul ar fi coborât la 37% din valoarea inițială, $0,6 \times 0,368 \approx 0,22$ A.

Bobine cuplate: generatorul și transformatorul

Cele două moduri rămase în care fluxul se poate schimba - prin variația ariei sau a unghiului θ , nu a câmpului - stau la baza generatorului electric. O buclă de N spire și arie A , care se rotește cu viteza unghiulară ω într-un câmp uniform $\vec{B}$, are fluxul $\Phi_B(t) = BA \cos(\omega t)$; legea lui Faraday, aplicată direct, dă o tensiune electromotoare sinusoidală,

$$\mathcal{E}(t) = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = NBA \omega \sin(\omega t),$$

de amplitudine $\mathcal{E}_0 = NBA\omega$. Aceasta este, în esență, orice generator electric din lume: o turbină (cu abur, apă sau vânt) rotește mecanic o bobină într-un câmp magnetic, iar inducția face tot restul. O buclă de $N = 200$ spire, arie $A = 0,05 \text{ m}^2$, într-un câmp $B = 0,4 \text{ T}$, rotindu-se la frecvența rețelei europene ($f = 50 \text{ Hz}$, deci $\omega = 2\pi f \approx 314 \text{ rad/s}$), atinge deja o amplitudine $\mathcal{E}_0 = NBA\omega \approx (200)(0,4)(0,05)(314) \approx 1256 \text{ V}$, peste un kilovolt - motivul pentru care generatoarele reale nu sunt, în principiu, mult mai complicate decât acest desen simplu al unei bucle care se rotește într-un magnet. Pentru că tensiunea electromotoare se schimbă odată cu $\sin(\omega t)$, ea alternează periodic de semn: exact curentul alternativ pe care îl folosește întreaga rețea electrică.

Motivul pentru care rețeaua rămâne în curent alternativ, în loc de curentul continuu susținut inițial de Edison, este un al doilea dispozitiv care există *doar* datorită inducției: **transformatorul**. Înfășurăm două bobine, cu N_p , respectiv N_s spire, pe același miez de fier; un curent alternativ prin bobina primară produce un flux magnetic alternativ în miez, iar acest flux, înlănțuit acum și de bobina secundară, induce în ea propria ei tensiune electromotoare. Cum ambele bobine înlănțuie, spiră cu spiră, exact același flux $\Phi_B(t)$,

$$\mathcal{E}_p = -N_p \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E}_s = -N_s \frac{d\Phi_B}{dt},$$

iar împărțind cele două relații, raportul tensiunilor la bornele celor două bobine este chiar raportul numărului lor de spire:

$$\boxed{\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}}$$

Într-un transformator ideal, fără pierderi, puterea intrată pe primar iese, integral, pe secundar, $V_p I_p = V_s I_s$, deci curenții merg în raportul invers:

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}.$$

Un transformator schimbă, deci, tensiunea pe curent, dar nu poate crea putere din nimic - exact aceeași conservare a energiei care a fixat semnul din legea lui Lenz. Iar acest schimb depinde, esențial, de faptul că fluxul *variază*: dacă am alimenta primarul cu un curent continuu, staționar, fluxul din miez ar fi constant, $d\Phi_B/dt = 0$, iar secundarul nu ar induce absolut nimic - exact experimentul lui Faraday din 1831 cu care am deschis acest curs, unde un curent staționar nu a mișcat deloc acul galvanometrului. Un transformator, spre deosebire de o baterie, funcționează *numai* în curent alternativ.

Miza practică este uriașă. O linie electrică ce transportă puterea P la tensiunea V poartă un curent $I = P/V$ și pierde, prin efect Joule în rezistența R a firelor, puterea $I^2 R = (P/V)^2 R$: de zece ori tensiunea înseamnă de o sută de ori mai puțină pierdere. De aceea puterea părăsește generatorul la zeci de kilovolți, este ridicată la sute de kilovolți pentru transportul pe distanță lungă, și este coborâtă din nou, în trepte, până la cei o sută sau două sute de volți de la priza din perete - fiecare treaptă realizată de un flux magnetic care leagă între ele două bobine.

Închiderea cercului: inducția ca a treia ecuație a lui Maxwell

Cursul 12 a scris cele patru ecuații ale lui Maxwell ca pe un sistem încheiat:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Prima ecuație este legea lui Gauss (Cursul 3): sarcina electrică este sursa câmpului $\vec{E}$. A doua spune că nu există sarcină magnetică: liniile lui $\vec{B}$ se închid mereu pe ele însele. A patra, legea Ampère-Maxwell, spune că un curent - așa cum am folosit mai sus la solenoid, unde termenul de deplasare era nul - și, în

plus, un câmp electric care variază sunt surse de rotor pentru $\vec{B}$. Iar a treia ecuație, $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, este exact ceea ce am demonstrat și am folosit în acest curs, de la primul rând: un câmp magnetic care variază este sursă de rotor pentru $\vec{E}$. Generatorul, autoinducția unei bobine, circuitul RL și transformatorul nu sunt patru fenomene separate, ci un singur fenomen, privit din patru unghiuri diferite - conținutul fizic complet al acestei a treia ecuații.

Simetria dintre a treia și a patra ecuație este cea care, în Cursul 12, a dus la unda electromagnetică. Un câmp $\vec{B}$ care variază creează un câmp $\vec{E}$ cu rotor (ecuația a treia, acest curs); un câmp $\vec{E}$ care variază creează, la rândul lui, un câmp $\vec{B}$ cu rotor (ecuația a patra, curentul de deplasare al lui Maxwell). Cele două mecanisme de inducție, unul electric și unul magnetic, împletite, se susțin reciproc la infinit, fără nicio sarcină sau curent care să le întrețină - exact mecanismul din spatele undei electromagnetice cu care s-a încheiat Cursul 12. Am pornit acest curs de la un ac de galvanometru care tresare într-un laborator din 1831 și am ajuns, prin același tip de raționament aplicat consecvent, la mașina electrică a lumii moderne: fiecare dinam, fiecare bobină, fiecare transformator și fiecare fascicul de lumină care traversează universul sunt, toate, același fenomen - un câmp care variază naște un alt câmp.