

Cursul 12: Legătura dintre electricitate și magnetism. Biot-Savart. Maxwell

Oersted și inducția magnetică

În **1820**, Hans Christian Oersted a descoperit legătura dintre electricitate și magnetism, în cazul sarcinilor electrice aflate în mișcare (un curent printr-o sârmă deviază acul unei busole).

Mărimea care descrie câmpul magnetic este **inducția magnetică** $\vec{B}$, cu

$$[B]_{\text{SI}} = \text{T (Tesla)}.$$

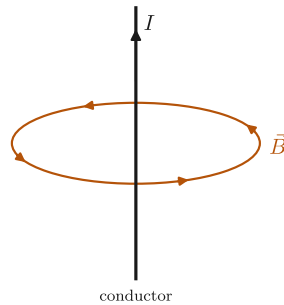


Figura 1: Câmpul magnetic B formează linii circulare în jurul conductorului parcurs de curentul I (regula mâinii drepte).

Relația Biot-Savart

Câmpul produs de un curent de intensitate I ce circulă pe conturul Γ , într-un punct P :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

unde μ_0 este **permeabilitatea magnetică a vidului**:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}.$$

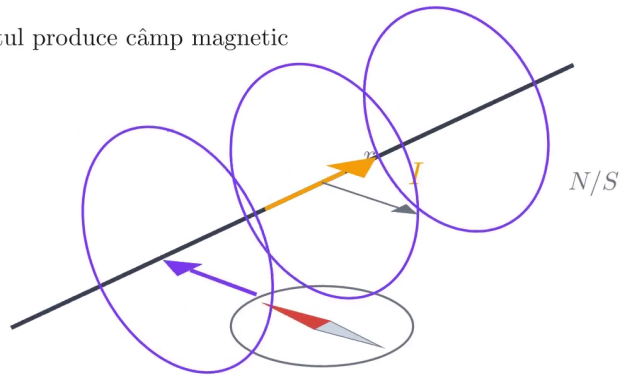
I este intensitatea curentului prin contur, iar $d\vec{l}$ și $\vec{R}$ sunt vectorul element de contur, respectiv vectorul de poziție de la $d\vec{l}$ la punctul P .

Ecuațiile lui Maxwell (1864)

Câmpurile electrice și magnetice sunt descrise complet de sistemul ecuațiilor lui Maxwell:

Oersted (1820): curentul produce câmp magnetic

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Acul se aliniază cu B, perpendicular pe fir

Figura 2: (3D) Oersted: firul cu curent deviază busola

$$d\vec{\ell} \quad \vec{R} \quad d\vec{B}$$

Biot-Savart: elementul de curent

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3}$$



Figura 3: (3D) Biot-Savart: contribuția elementului dvec l

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Ecuația $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ reflectă absența monopolilor magnetici: liniile câmpului magnetic se închid întotdeauna pe ele însele, fără surse sau puțuri.

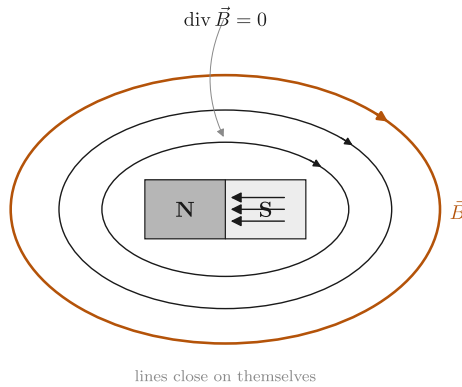


Figura 4: Liniile câmpului magnetic ale unui magnet bară se închid pe ele însele, fără surse sau puțuri: în exterior merg de la polul N la polul S, iar prin interior de la S la N, ilustrând ecuația $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

unde:

- ρ - densitatea volumică de sarcină într-un punct din spațiu;
- ε_0 - permitivitatea electrică;
- $\vec{j}$ - densitatea de curent într-un punct;
- $\vec{E}$ - câmpul electric;
- $\vec{B}$ - inducția magnetică.

Reamintim operatorii diferențiali:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \dots$$

Forma integrală a ecuațiilor lui Maxwell se obține aplicând teorema lui Stokes (pentru forma cu rot) și teorema divergenței (pentru forma cu div):

Unda electromagnetică

Din ecuațiile lui Maxwell se poate arăta că, atunci când au loc variații în timp ale câmpurilor electric și magnetic, ia naștere o **undă electromagnetică** care se propagă în vid cu viteza luminii:

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(Observație din curs: un foton este neutru din punct de vedere electric, sarcina electrică totală fiind 0.)

Divergența: cât izvorăște câmpul dintr-un punct

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

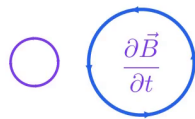
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

sarcina este sursa lui E; câmpul B nu are surse, liniile lui se închid

Figura 5: (2D) Divergența: izvoare și puțuri ale câmpului

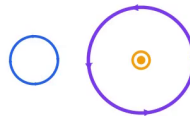
Rotorul: rotația locală a câmpului

$\vec{B}$ variabil induce $\vec{E}$ circular



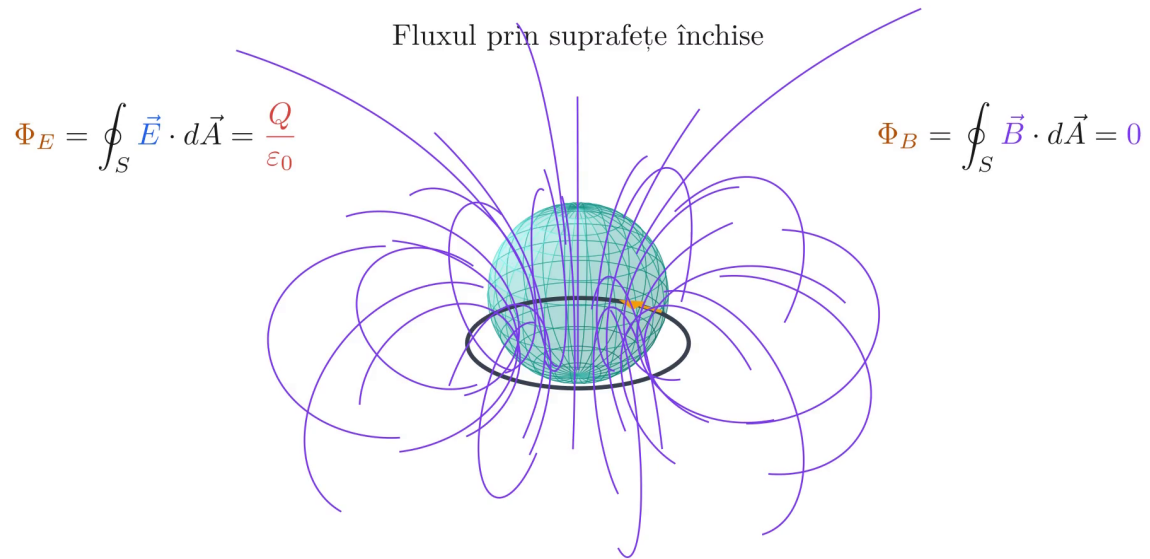
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

curentul induce $\vec{B}$ circular



$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Figura 6: (2D) Rotorul (curl): rotația locală a câmpului



Nu există sarcină magnetică izolată, un monopol - de aceea fluxul magnetic e mereu nul

Figura 7: (2D) Fluxul și forma integrală a legii lui Gauss

Teorema lui Stokes: circulația pe contur = suma rotoarelor

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Figura 8: (2D) Teorema lui Stokes: rotor și circulație

Teorema divergenței: suma divergențelor = fluxul prin contur

$$\iiint_V (\operatorname{div} \vec{F}) dV = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \iint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Figura 9: (2D) Teorema divergenței (Gauss-Ostrogradski)

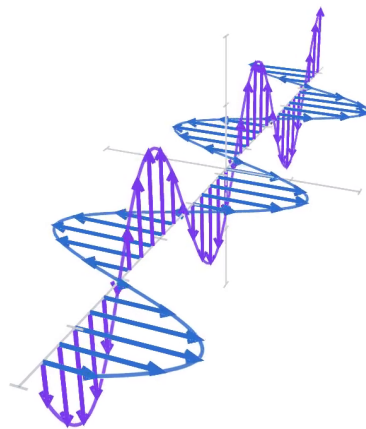


Figura 10: (3D) Unda electromagnetică: $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{c}$

Câmpul magnetic pe axa unei spire

Pentru o spirală circulară de rază R , parcursă de curentul I , inducția într-un punct $P(0,0,z)$ de pe axă este:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

În centrul spirei ($z = 0$):

$$B(0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Pentru o bobină cu N spire, valorile se înmulțesc cu N :

$$B(z) = \frac{N \mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad B(0) = \frac{N \mu_0 I}{2R}.$$

Graficul $B(z)$ are un maxim în $z = 0$ și scade simetric la depărtarea de spirală.

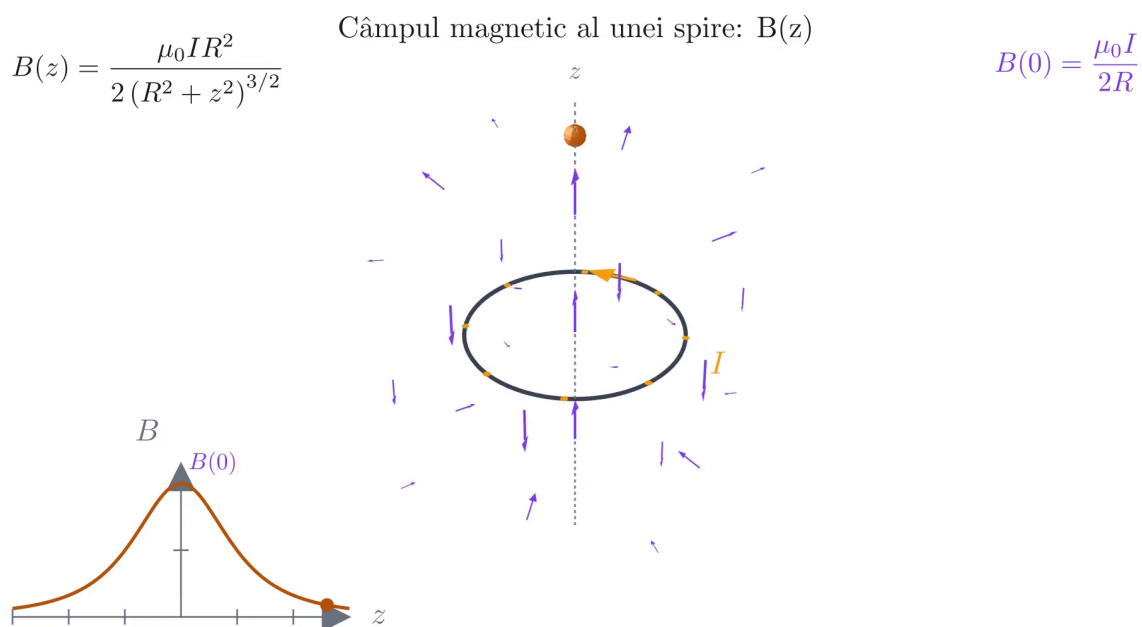


Figura 11: (3D) Câmpul magnetic pe axa spirei $B(z)$