

Cursul 8: Electrocinetica. Curentul electric și densitatea de curent

Recapitulare: de la sarcini în repaus la sarcini în mișcare

Cursurile 1-7 au studiat electrostatica: sarcini electrice imobile, aflate în repaus sau, pentru conductori, la echilibru electrostatic. Reținem, întâi, cele patru relații fundamentale ale câmpului electrostatic în vid, valabile pentru orice distribuție statică de sarcină:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= Q \vec{E} \\ \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= 0 \iff \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} V \\ \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \iff \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

adică, în ordine: forța Coulomb exercitată asupra unei sarcini Q ; caracterul conservativ și irotațional al câmpului electrostatic; legătura dintre câmp și potențial; și legea lui Gauss, în formă integrală și în formă locală. Din a treia relație rezultă și diferența de potențial ca circulație a câmpului, $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$, linia de câmp fiind orientată mereu dinspre potențialul mai mare spre cel mai mic.

Pentru un conductor la echilibru electrostatic, aceste relații impun un tablou complet, stabilit în Cursurile 4-5: sarcina electrică se așază exclusiv pe suprafață, câmpul este nul în interior ($\vec{E} = 0$), potențialul este constant pe tot conductorul, în interior și la suprafață ($V = \text{const}$), iar imediat lângă suprafață câmpul este perpendicular pe ea, cu modulul $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, proporțional cu densitatea superficială de sarcină σ .

Cursurile 6 și 7 au extins acest tablou la sistemul format din doi conductori cu sarcini egale și de semn opus - **condensatorul** -, caracterizat prin capacitatea $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$ (Cursul 6), și au calculat energia înmagazinată la încărcarea lui, sub cele trei forme echivalente stabilite în Cursul 7:

$$W_{\text{el}} = \frac{Q U_{AB}}{2} = \frac{C U_{AB}^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Toate aceste rezultate - ale electrostaticii sarcinilor libere și ale condensatorului deopotrivă - au un lucru esențial în comun: descriu sarcini aflate în **repaus**. Cursul de față rupe tocmai această ipoteză: ce se întâmplă atunci când sarcinile electrice părăsesc repausul și încep să curgă?

Electrocinetica. Curentul electric

Fie un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiu în care, la momentul t , se află sarcina totală $Q(t)$, distribuită continuu. Pe un element de volum dV din jurul unui punct $\vec{r} \in \mathcal{D}$, sarcina elementară este:

$$dQ = \rho(\vec{r}, t) dV,$$

unde ρ este **densitatea volumică de sarcină** (Cursul 4), măsurată în C/m^3 - de data aceasta, însă, o funcție care depinde explicit și de timp, pentru că sarcina din $\mathcal{D}$ se poate redistribui de la un moment la altul.

Orice mișcare a unui corp încărcat electric este un fenomen care se numește **curent electric**.

Definiția este deliberat de largă: nu contează *cine* se mișcă - un electron, un ion, o bară electrizată întreagă - și nici *ce anume* îl pune în mișcare; orice deplasare de sarcină electrică, prin orice mecanism, este curent electric. Tocmai pentru că mecanismele care pun sarcina în mișcare diferă atât de mult de la un caz la altul, este utilă o clasificare a curenților după natura lor fizică.

Această definiție marchează și o ruptură reală față de tot ce am studiat până acum. Un conductor parcurs de curent electric nu se mai află la echilibru electrostatic, în sensul strict al Cursurilor 4-5: câmpul din interiorul lui nu mai este nul, ci este chiar câmpul care pune purtătorii de sarcină în mișcare ordonată și le întreține curgerea. Studiul acestei mișcări organizate de sarcină stă la baza întregii electrotehnici - circuite, motoare, instalații electrice -, iar cursurile următoare vor arăta exact ce relație leagă acest câmp de curentul pe care îl produce (legea lui Ohm).

Tipuri de curenți

În funcție de natura corpurilor încărcate electric implicate, curenții se clasifică în mai multe feluri:

1. **Curenți de convecție** - curentul asociat mișcării corpurilor macroscopice electrizate ca întreg: o bară, un pieptăn, un disc, o bucată de sticlă, electrizate în prealabil și puse apoi în mișcare. Sarcina electrică este "lipită" de corp și se deplasează exact cu viteza lui mecanică; nu există nicio mișcare a sarcinii față de corpul care o poartă - curentul de convecție seamănă, de aceea, mai degrabă cu transportul unei mărfi decât cu o curgere propriu-zisă.
2. **Curenți de drift / conducție** - produși de deplasarea unor particule încărcate electric sub acțiunea *exclusivă* a câmpului electric, de exemplu particulele accelerate într-un accelerator de particule. Curenții prin sârmele metalice sunt curenți de drift: câmpul electric aplicat la capetele firului este cel care pune electronii de conducție într-o mișcare ordonată, suprapusă peste agitația lor termică haotică. Aceeași denumire se folosește și pentru mișcarea ionilor dintr-o plasmă sau a purtătorilor de sarcină dintr-un semiconductor, atunci când sunt puși în mișcare de un câmp electric exterior.
3. **Curenți de difuzie** - cauzăți exclusiv de diferența de concentrație dintre particule, fără intervenția vreunui câmp electric: purtătorii se deplasează, în medie, dinspre regiunea mai concentrată spre cea mai puțin concentrată, exact cum difuzează orice specie de particule aflată într-un gradient de concentrație. Mecanismul este important, de exemplu, în semiconductori, unde o concentrație neuniformă de electroni sau goluri produce un curent chiar și în absența oricărui câmp electric aplicat.

Cele trei mecanisme pot coexista în același sistem fizic: un semiconductor cu dopaj neuniform, parcurs și de un curent aplicat din exterior, are simultan un curent de drift (dat de câmpul aplicat) și un curent de difuzie (dat de gradientul de concentrație al purtătorilor liberi) - suma lor este curentul total măsurat la bornele dispozitivului.

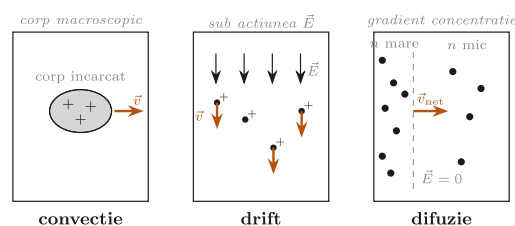


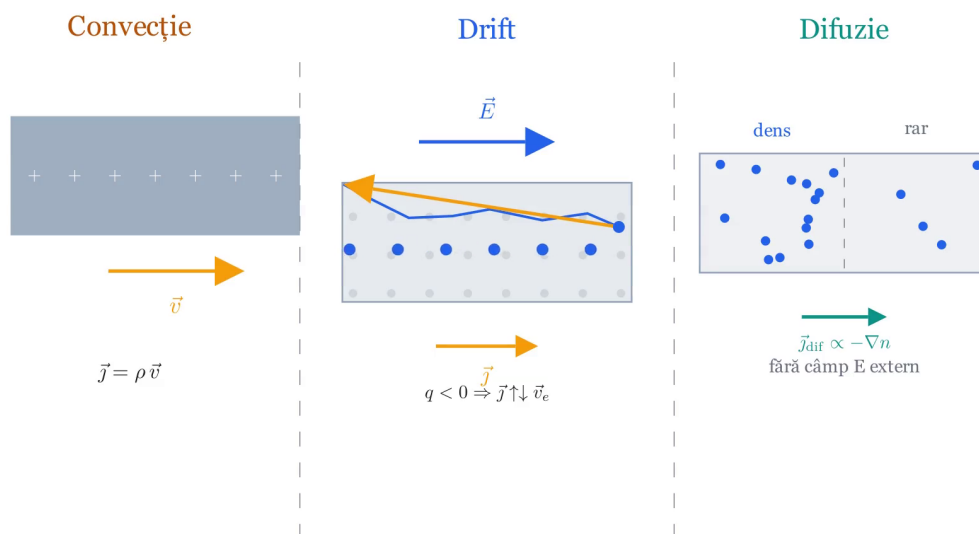
Figura 1: Cele trei tipuri de curent electric: convecție (corp macroscopic încărcat în mișcare), drift (purtători deplasăți de câmpul E) și difuzie (gradient de concentrație, fără câmp electric).

O primă aplicație numerică arată cum se calculează, concret, un curent de convecție. Banda transportoare a unui generator electrostatic (de tip Van de Graaff) este o curea izolatoare de lățime w , încărcată uniform cu densitatea superficială de sarcină σ , care se deplasează cu viteza u . În intervalul dt , banda înaintează cu $u dt$, transportând o fâșie de arie $w(u dt)$ și, odată cu ea, sarcina $dQ = \sigma w u dt$; curentul purtat de bandă este, deci, $I = dQ/dt = \sigma w u$.

Date: bandă de lățime $w = 0,4$ m, cu densitatea superficială de sarcină $\sigma = 3 \times 10^{-5}$ C/m², deplasându-se cu viteza $u = 15$ m/s.

Cerință: intensitatea curentului de convecție transportat de bandă.

Tipuri de curent electric



Comparație: cele trei mecanisme generează curent prin mecanisme diferite

Figura 2: (3D) Tipuri de curent: convecție, drift, difuzie

Rezolvare:

$$I = \sigma w u = (3 \times 10^{-5})(0,4)(15) = 1,8 \times 10^{-4} \text{ A} = 0,18 \text{ mA}.$$

Este exact ordinul de mărime al curentului de încărcare al unui generator Van de Graaff de laborator: mic în amperi, dar suficient ca, acumulat minute în șir pe cupola generatorului, să ridice potențialul acestuia la sute de mii de volți. Spre deosebire de curenții de conducție, calculați mai jos pornind de la concentrația și viteza purtătorilor individuali, curentul de convecție se calculează direct din mișcarea *macroscopică* a corpului încărcat - nu este nevoie să cunoaștem nimic despre structura microscopică a sarcinii de pe bandă.

Densitatea de curent

O sarcină aflată în mișcare traversează, în timp, diverse suprafețe din spațiu, iar tăria acestei curgeri depinde atât de câți purtători trec, cât și de cât de repede se mișcă și în ce direcție. Caracterizăm curgerea printr-un vector numit **densitate de curent**, notat $\vec{j}$, al cărui modul este egal cu sarcina Δq ce străbate, în intervalul Δt , o suprafață de arie ΔS_m **perpendiculară** pe direcția curgerii, raportată la această arie și la timp:

$$|\vec{j}| = j = \frac{\Delta q}{\Delta S_m \cdot \Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta t} = j \Delta S_m.$$

Cerința ca suprafața să fie perpendiculară pe curgere nu este întâmplătoare: o suprafață înclinată "prinde" mai puțină sarcină pe unitatea ei de arie, exact ca o pânză ținută oblic în calea unei ploii care cade vertical - aceeași idee geometrică de arie proiectată, deja folosită la construcția fluxului oricărui câmp vectorial (Cursurile 2-3). Pentru o secțiune **oblică** ΔS , cu unghiul α între normala ei $\hat{n}$ și direcția curgerii, aria ei utilă (proiecția perpendiculară pe curgere) este $\Delta S_m = \Delta S \cos \alpha$ (vezi clasa a VIII-a):

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = j \Delta S \cos \alpha = \vec{j} \cdot \hat{n} \Delta S. \quad (1)$$

Definim **intensitatea curentului electric**:

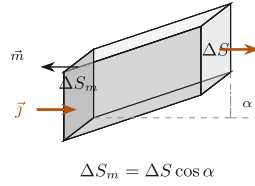


Figura 3: Paralelipipedul oblic străbătut de purtătorii de sarcină: secțiunea normală ΔS_m perpendiculară pe densitatea de curent $\vec{j}$, secțiunea oblică ΔS și relația $\Delta S_m = \Delta S \cos \alpha$.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

raportul dintre cantitatea de sarcină ce străbate o secțiune **arbitrară** (nu neapărat perpendiculară pe curgere) și intervalul de timp Δt în care se face traversarea, măsurată în amperi ($A = C/s$). Spre deosebire de $\vec{j}$, intensitatea I este o mărime **scalară**: nu depinde de forma sau de orientarea secțiunii alese, ci doar de sarcina totală transportată prin ea. Relația (1) este, de fapt, o primă formă a ideii de **flux al lui $\vec{j}$** printr-o suprafață mică și plată; forma ei generală, valabilă pentru o suprafață oarecare, va fi construită riguros în cursul următor.

Definiția lui I este aceeași indiferent de scara fenomenului, iar scara variază enorm: de la ordinul picoamperilor ($\sim 10^{-12} A$), cât este curentul printr-un singur canal ionic al unei membrane celulare, până la zeci de mii de amperi într-un fulger. Ceea ce diferă de la un caz la altul este doar câți purtători de sarcină traversează secțiunea aleasă și cât de repede o fac - nu și formula care leagă I de $\vec{j}$.

Merită subliniată diferența dintre cele două mărimi tocmai introduse. Densitatea de curent $\vec{j}$ este, în multe privințe, mărimea mai fundamentală: descrie curgerea sarcinii punct cu punct, cu direcție și sens proprii în fiecare loc din spațiu - la fel cum, în mecanica fluidelor, câmpul vitezelor $\vec{v}(\vec{r})$ descrie curgerea unui fluid în fiecare punct al lui. Intensitatea I , în schimb, este doar suma (fluxul) acestei curgeri prin secțiunea aleasă, exact cum debitul unei conducte este o singură cifră, obținută prin însumarea câmpului de viteze pe toată secțiunea ei: utilă practic, dar mult mai săracă în informație decât $\vec{j}$ însuși, care rămâne definit în fiecare punct al conductorului, indiferent ce secțiune alegem să "citim".

Legătura cu viteza purtătorilor

Pentru a lega $\vec{j}$ de mișcarea reală a purtătorilor de sarcină, urmărim un fascicul de particule identice, fiecare cu sarcina q , deplasându-se toate cu aceeași viteză $\vec{v}$. Particulele care vor traversa suprafața oblică ΔS în următorul interval Δt sunt exact cele conținute, chiar acum, într-o "cușcă" imaginară în formă de paralelipiped oblic, cu baza ΔS și muchia laterală $\vec{v} \Delta t$ - la fel cum, pentru a afla câtă ploaie va intra printr-o fereastră înclinată în secunda următoare, ne imaginăm coloana oblică de picături aflate, chiar acum, la cel mult $v \Delta t$ de fereastră. Sarcina conținută în această cușcă este:

$$\Delta q = \rho \Delta V = \rho \Delta S_m \Delta X = \rho \Delta S \cos \alpha \Delta X,$$

unde $\Delta X = v \Delta t$ este lungimea parcursă de particule în intervalul Δt . Împărțind la Δt :

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho \Delta S \cos \alpha \frac{\Delta X}{\Delta t} = \rho \Delta S \vec{v} \cdot \hat{n}. \quad (2)$$

Cele două expresii ale lui $\Delta q / \Delta t$, (1) și (2), trebuie să coincidă pentru orice orientare $\hat{n}$ a suprafeței alese, deci $\vec{j} \cdot \hat{n} = \rho \vec{v} \cdot \hat{n}$ pentru orice $\hat{n}$, de unde:

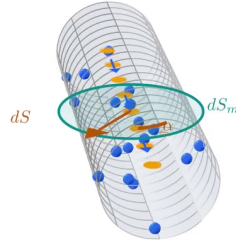
$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v}}$$

Modulul densității de curent se măsoară în A/m^2 , deoarece $j = \frac{\Delta q}{\Delta S_m \Delta t} = \frac{I}{\Delta S_m}$: densitatea de curent este, cum îi spune și numele, curent pe unitatea de arie.

Densitatea de curent $\vec{j} = \rho \vec{v}$: secțiune oblică

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$$\Delta S_m = \Delta S \cos \alpha$$



$$\cos \alpha = 0.766$$

$$\alpha = 40^\circ$$

Pe măsură ce unghiul crește, cosinusul scade și fluxul prin secțiunea oblică scade

Figura 4: (3D) Densitatea de curent $\vec{j} = \rho \vec{v}$: secțiune oblică

Particularizare pentru curenții de conducție

Rezultatul $\vec{j} = \rho \vec{v}$ este general - valabil pentru orice distribuție continuă de sarcină aflată în mișcare -, dar, în cazul curenților de conducție, purtătorii sunt particule discrete (electroni, ioni), toate cu aceeași sarcină q . Pentru un asemenea fascicul, cu concentrația $n = \frac{N}{V}$ (numărul de particule pe unitatea de volum, măsurată în m^{-3}), densitatea volumică de sarcină este $\rho = \frac{Nq}{V} = nq$, deci:

$$\vec{j} = qn \vec{v}$$

Această formă particularizată va sta la baza legii lui Ohm, mai târziu, atunci când vom exprima viteza $\vec{v}$ a purtătorilor în funcție de câmpul electric care îi pune în mișcare. Ordinul de mărime al lui n variază enorm de la un material la altul: într-un metal precum cuprul, n este de ordinul 10^{28} - 10^{29} m^{-3} , pentru că aproape fiecare atom contribuie cu câte un electron liber; într-un semiconductor, n poate fi de mii sau milioane de ori mai mic, și, mai important, poate fi controlat prin dopaj - una dintre proprietățile care fac semiconductorii atât de utili în electronică.

Sensul vectorului $\vec{j}$

Formula $\vec{j} = qn\vec{v}$ ascunde o subtilitate care merită toată atenția: sensul lui $\vec{j}$ este fixat de *produsul* dintre semnul sarcinii și sensul vitezei, nu de viteză singură.

- Dacă particula este **pozitivă** ($q > 0$), $\vec{j}$ are aceeași direcție și sens cu viteza $\vec{v}$: purtătorul și vectorul densitate de curent "merg" în aceeași direcție.
- Dacă particula este **negativă** ($q < 0$, de exemplu un electron), $\vec{j}$ are sens **opus** vitezei: purtătorul se deplasează într-un sens, dar vectorul densitate de curent arată în sensul celălalt.

Aceasta este exact situația dintr-un fir metalic obișnuit: electronii de conducție se deplasează dinspre borna negativă spre cea pozitivă a sursei, dar vectorul $\vec{j}$ - și, odată cu el, sensul convențional al curentului I , moștenit istoric din vremea când se credea că purtătorii de sarcină din metale sunt pozitivi - este orientat exact invers, dinspre borna pozitivă spre cea negativă, prin circuitul exterior. Fizica nu depinde de această convenție de semn - este doar o contabilitate pe care toată lumea o folosește la fel -, dar trebuie aplicată consecvent, purtător cu purtător.

Vectorul densitate de curent se calculează, deci, ținând cont *simultan* de sensul vitezei și de semnul sarcinii purtătorului: săgeata din desen reprezintă vectorul $\vec{j}$, în timp ce intensitatea I , fiind o mărime

scalară, nu are nicio săgeată asociată - ea capătă doar un semn algebric, o dată ce alegem arbitrar un sens de referință pentru secțiunea prin care o calculăm.

Sensul lui $\vec{j}$ față de viteza purtătorilor

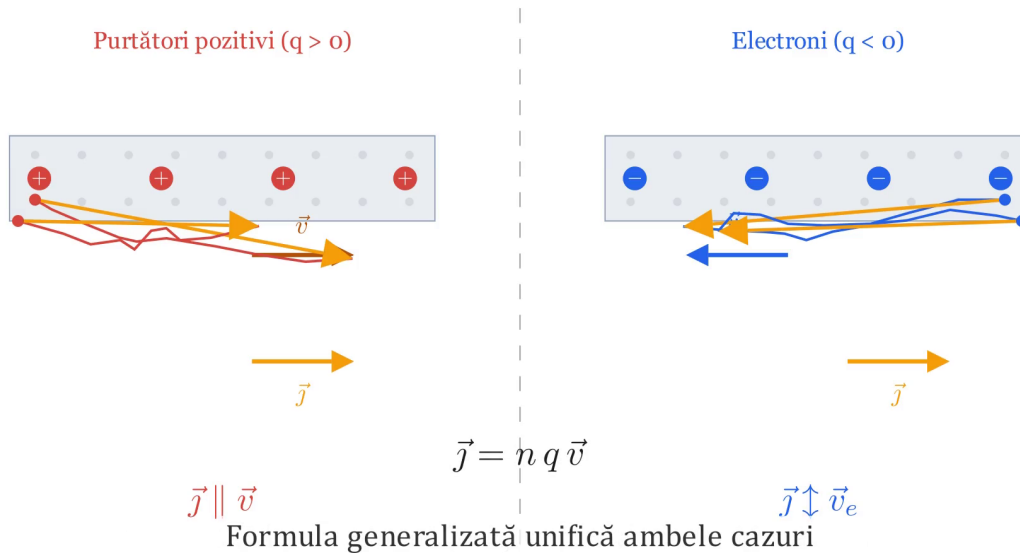


Figura 5: Sensul lui $\vec{j}$ față de viteza purtătorilor

Exemplu numeric: densitatea de curent într-un fir de cupru

Date: un fir de cupru cu secțiunea $S = 2 \text{ mm}^2 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, parcurs de un curent $I = 10 \text{ A}$, uniform distribuit pe secțiune. Concentrația electronilor de conducție în cupru este $n \approx 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ (aproximativ un electron liber per atom), iar sarcina elementară este $e \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Cerință: densitatea de curent j și viteza de drift v a electronilor de conducție.

Rezolvare: secțiunea fiind perpendiculară pe curgere ($\Delta S_m = S$), densitatea de curent rezultă direct din $I = jS$:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{10}{2 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^6 \text{ A/m}^2.$$

Din particularizarea $j = qnv$ (în modul, cu $q = e$), viteza purtătorilor este:

$$v = \frac{j}{ne} = \frac{5 \times 10^6}{(8,5 \times 10^{28})(1,6 \times 10^{-19})} \approx 3,7 \times 10^{-4} \text{ m/s} \approx 0,37 \text{ mm/s}.$$

Rezultatul este surprinzător: purtătorii unui curent de 10 A - un curent obișnuit, de ordinul celui folosit de un aparat electrocasnic mic - se deplasează, în medie, cu doar câteva zecimi de milimetru pe secundă. (Vectorul $\vec{j}$, purtătorii fiind electroni, este orientat opus vitezei lor reale de drift, conform secțiunii anterioare - dar modulul calculat mai sus rămâne cel corect.) Contrastul dintre această viteză derizorie și viteza aproape instantanee cu care se aprinde un bec, la acționarea întrerupătorului, se explică astfel: nu electronii "aleargă" de la întrerupător până la bec, ci *câmpul electric* care îi pune în mișcare se instalează de-a lungul întregului fir aproape cu viteza luminii, iar toți electronii firului - de la un capăt la altul - încep să se deplaseze, cu această viteză mică, practic simultan. Un curent electric mare nu înseamnă purtători rapizi, ci un număr enorm de purtători, fiecare mișcându-se foarte încet.