

Cursul 4: Ecuația Poisson; conductori la echilibru electrostatic

Recapitulare

Din cursurile anterioare reținem relațiile fundamentale ale câmpului electrostatic:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (3)$$

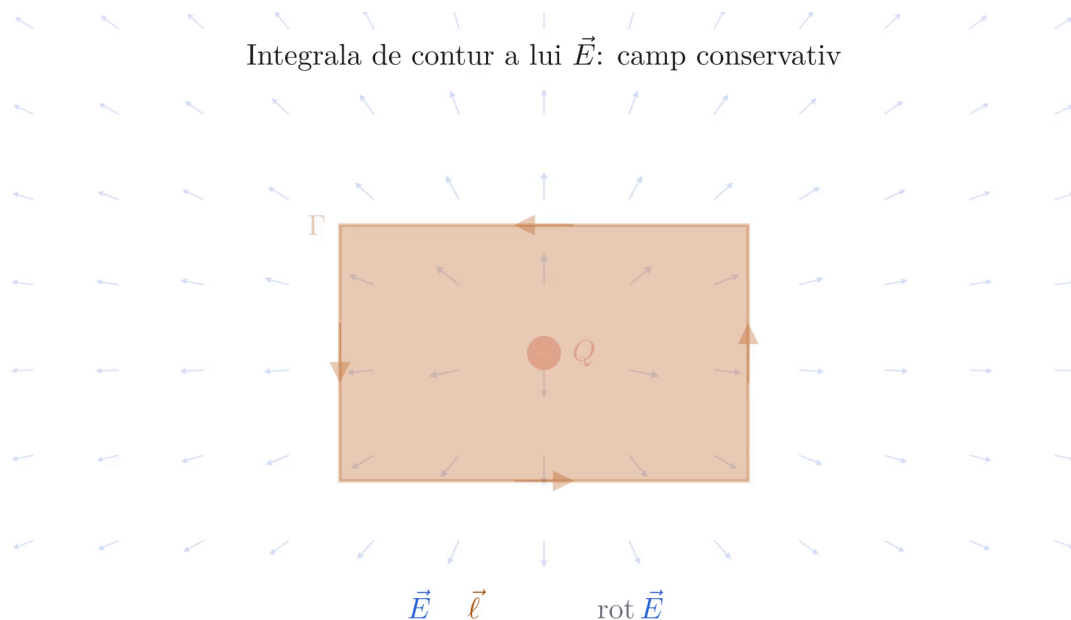
Relația (1) implică, prin teorema Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = 0,$$

ceea ce este consistent cu (3).

Diferența de potențial între două puncte 1 și 2 este:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$



Câmpul electrostatic este conservativ: integrala pe orice contur închis este zero

Figura 1: Integrala de contur a lui E este zero

Densitatea volumică de sarcină și legătura cu câmpul electric

Densitatea volumică de sarcină

Fie un domeniu $\mathcal{D}$ din spațiu. Definim **densitatea volumică de sarcină** în punctul $P(x, y, z)$ ca:

$$\rho(x, y, z) = \frac{dQ}{dV} \quad [\text{C/m}^3].$$

Sarcina totală conținută în domeniul $\mathcal{D}$ este:

$$Q_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} dQ = \iiint_{\mathcal{D}} \rho dV.$$

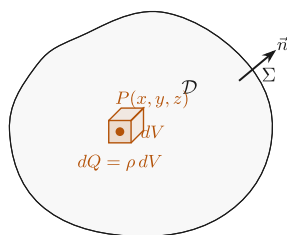
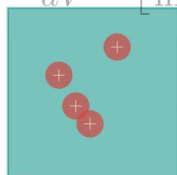


Figura 2: Domeniu $\mathcal{D}$ delimitat de suprafața Σ , cu elementul de volum dV și sarcina elementară $dQ = \rho dV$ în punctul $P(x, y, z)$.

Densitatea volumică de sarcină ρ

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$$



$$\rho(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV}$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= 14.0 \text{ u.a.} \\ \Delta V &= 0.180 \text{ u.a.}^3 \\ \rho &= 77.8 \text{ C/m}^3 \end{aligned}$$

Densitatea de sarcină depinde de poziție: este o funcție de punct în spațiu

Figura 3: Definiția densității volumice de sarcină ρ

Teorema Gauss în formă integrală

Aplicând teorema Gauss (divergenței):

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div } \vec{E} dV.$$

Pe de altă parte, legea lui Gauss pentru câmpul electric afirmă că fluxul lui $\vec{E}$ printr-o suprafață închisă Σ este egal cu sarcina interioară împărțită la ε_0 :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \rho dV.$$

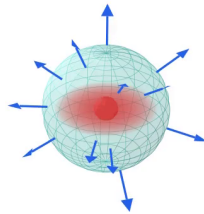
Deoarece relația este valabilă pentru orice domeniu $\mathcal{D}$, integranzii trebuie să fie egali. Obținem astfel **legătura matematică dintre câmp și sursă**:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (4)$$

Legea lui Gauss: fluxul electric

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = 6.00 \text{ V} \cdot \text{m}$$



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Local, câmpul izvorăște din sarcină - aceasta este forma diferențială a legii

Figura 4: Legea Gauss: flux prin suprafata închisă

Ecuția lui Poisson

Derivarea ecuației

Combinăm relațiile (2) și (4). Înlocuind $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ în (4):

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Operatorul grad în coordonate carteziane este:

$$\operatorname{grad} V = \vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z},$$

deci:

$$-\operatorname{div} \left(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Aplicând operatorul div termen cu termen:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

adică:

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Operatorul laplacian

Introducem **operatorul laplacian** Δ (numit și ∇^2), definit în coordonate carteziane prin:

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Cu această notație, ecuația (5) se rescrie ca $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, adică:

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (6)$$

Aceasta este **ecuația lui Poisson** - legătura dintre potențialul electric V și densitatea de sarcină ρ care îl produce.

- În regiunile fără sarcini libere ($\rho = 0$), ecuația lui Poisson se reduce la **ecuația lui Laplace**: $\Delta V = 0$.
- Ecuația lui Poisson este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, fundamentală în electrostatică, electrotehnică și fizica matematică.

Derivarea ecuației Poisson: $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$

$$\begin{aligned} &\text{Gauss (diferențial)} && \text{câmp conservativ} \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \vec{E} = -\text{grad } V \\ \text{div}(-\text{grad } V) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\text{div}(\text{grad } V) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\Delta V &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta V &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Ecuația Poisson: laplacianul potențialului este proporțional cu densitatea de sarcină

Figura 5: Derivarea pas cu pas a ecuației lui Poisson

Proprietăți ale conductorilor metalici la echilibru electrostatic

Structura microscopică a metalelor

Un material **izolator** plasat într-un câmp electric nu va fi practic parcurs de curent electric, atâta timp cât câmpul electric nu depășește valoarea de străpungere. Un **conductor metallic** se deosebește de

izolator prin faptul că în interiorul metalului există electroni liberi, care se pot mișca haotic în toate direcțiile. Nu toți electronii sunt liberi - doar aceia care provin din straturile marginale (de valență) ale atomilor.

Concentrația atomilor într-un metal este de ordinul 10^{28} m^{-3} . Dacă fiecare atom cedează câte un electron liber, vom avea o concentrație de electroni liberi de același ordin de mărime:

$$n_e \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Raportul dintre masa protonului și masa electronului este:

$$\frac{m_p}{m_e} \approx 1836.$$

Deoarece electronii sunt cu mult mai ușori decât ionii din rețeaua cristalină, ei răspund practic instantaneu la orice câmp electric aplicat.

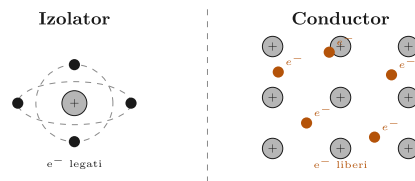
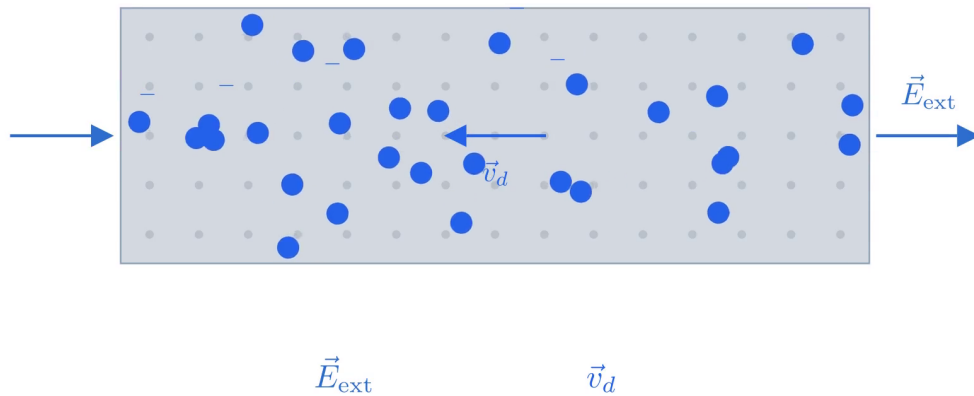


Figura 6: Comparație izolator-conductor la nivel atomic: electroni legați față de electroni liberi de valență.

Electroni liberi în metal: mișcare haotică termică



Câmp extern aplicat: electronii derivă în sens opus câmpului, spre stânga

Figura 7: Mișcarea haotică a electronilor liberi în metal

Mecanismul atingerii echilibrului electrostatic

Când un conductor metalic este plasat într-un câmp electric extern $\vec{E}_{\text{ext}}$, electronii liberi sunt puși în mișcare ordonată (contrar câmpului, deoarece au sarcină negativă). Această mișcare continuă până când câmpul produs de sarcina redistribuită $\vec{E}_{\text{dist}}$ îl anulează exact pe cel exterior:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{dist}} = \vec{0} \quad (\text{la echilibru electrostatic}).$$

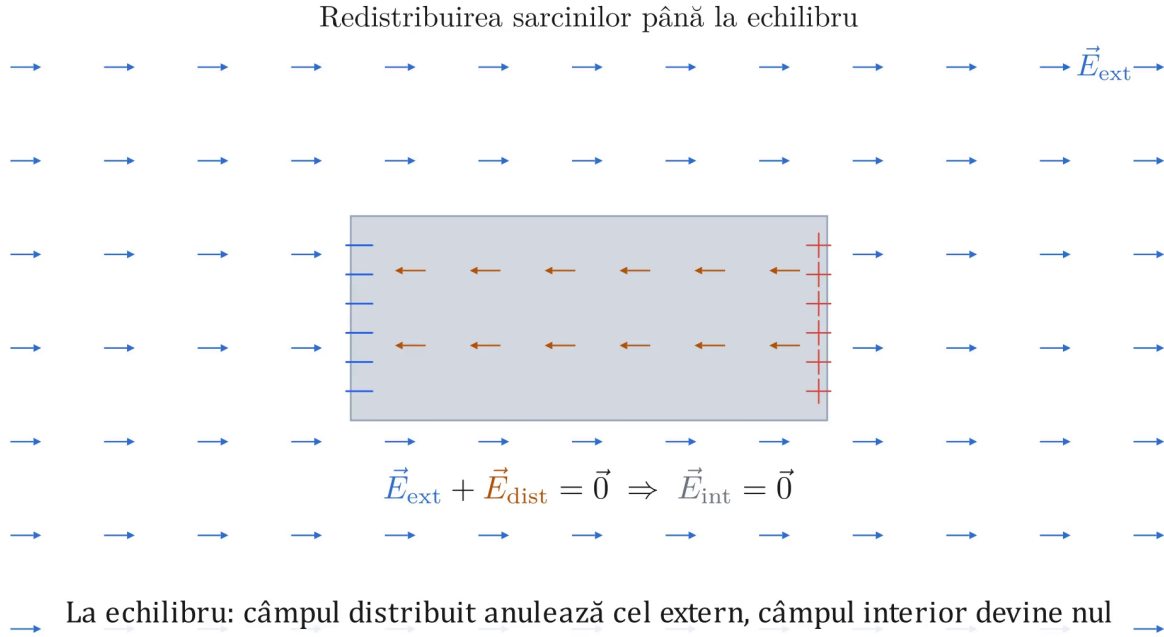


Figura 8: Redistribuirea sarcinilor până la echilibru (animatie vedeta)

Proprietățile conductorului la echilibru electrostatic

La echilibru electrostatic, un conductor metalic prezintă trei proprietăți fundamentale:

Proprietatea 1: Câmpul electric total în interior este nul

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{0} \quad (\text{în interiorul metalului, la echilibru electrostatic}). \quad (7)$$

Aceasta este consecința directă a procesului de redistribuire a sarcinilor descris mai sus.

Proprietatea 2: Sarcina netă se distribuie numai pe suprafață Din (7) și ecuația (4):

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \implies \rho = 0 \quad (\text{în interiorul metalului}).$$

Aceasta înseamnă că nu există densitate volumică de sarcină în interiorul conductorului. Prin urmare, **sarcina netă cu care este electrizat metalul se distribuie la echilibru electrostatic exclusiv pe suprafața acestuia**, nu și în interior.

Demonstrație prin legea Gauss: considerăm o suprafață gaussiană Σ trasată în interiorul metalului (oriunde, fără să atingă suprafața exterioară). Deoarece $\vec{E} = \vec{0}$ în interior:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \implies Q_{\text{int}} = 0.$$

Aceasta este valabil pentru orice suprafață gaussiană interioară, deci $\rho = 0$ pretutindeni în interior, iar sarcina se găsește doar la suprafață.

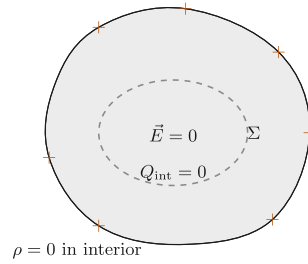


Figura 9: Conductor arbitrar încărcat; suprafața gaussiană Σ trasată în interior cu $E = 0$ și $Q_{\text{int}} = 0$; sarcinile se găsesc exclusiv pe suprafața exterioară.

Proprietatea 3: Metalul este un sistem echipotențial Fie două puncte oarecare 1 și 2 din interiorul (sau de pe suprafața) metalului, legate printr-un drum Γ aflat în interior. Deoarece $\vec{E} = \vec{0}$ pe tot drumul:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \implies V_1 = V_2.$$

Prin urmare, **metalul aflat la echilibru electrostatic este un sistem echipotențial**: potențialul electric are aceeași valoare în orice punct al conductorului (interior și suprafață).

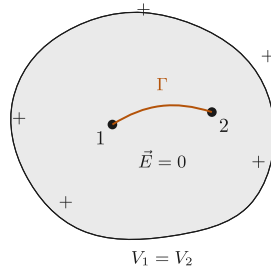


Figura 10: Conductor arbitrar la echilibru; drum Γ între punctele 1 și 2 în interior; $E = 0$ pe drum; concluzie $V = V$.

Rezumat - caracteristicile unui conductor metalic la echilibru electrostatic

1. Câmpul electric total din interior este nul:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{0} \quad (\text{în interior}).$$

2. Sarcina netă cu care este electrizat metalul se distribuie la echilibru electrostatic numai pe suprafața sa, nu și în interior ($\rho = 0$ în interior).
3. Metalul este un sistem echipotențial în stare de echilibru electrostatic: potențialul este constant în tot conductorul.

Notă: Câmpul electric exterior suprafeței metalului este perpendicular pe aceasta (altfel componenta tangențială ar pune electronii în mișcare, contrazicând echilibrul).