

Cursul 2: Fluxul câmpului electric, divergența și rotorul

Recapitulare: circulația câmpului electric

Câmpul electric $\vec{E}$ este tangent la liniile de câmp în fiecare punct. Fie două drumuri Γ_1 și Γ_2 care leagă punctele 1 și 2.

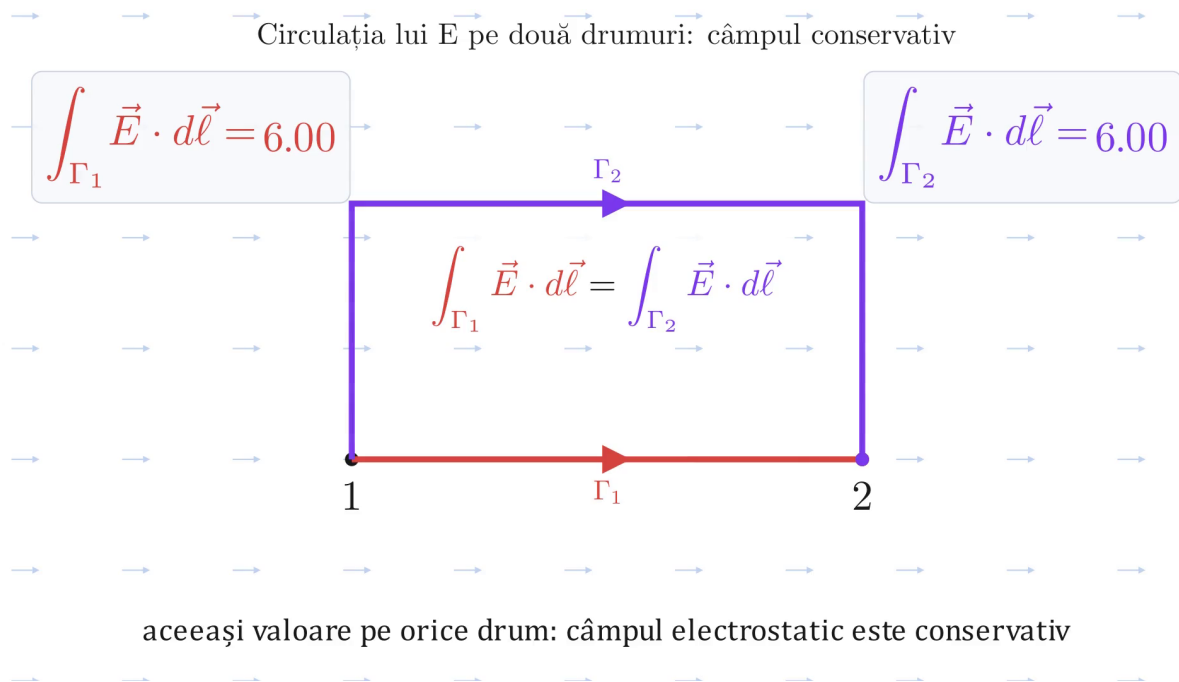


Figura 1: Circulația câmpului electric pe două drumuri

Circulația câmpului electric este *independentă de drum*:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

O consecință directă este că circulația pe orice contur închis Γ este nulă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (1)$$

Aceasta este una dintre proprietățile fundamentale ale câmpului electrostatic și stă la baza caracterului său irotațional (demonstrat în secțiunea dedicată de mai jos).

Fluxul câmpului electric

Definiție pentru o suprafață plană

Fie $\vec{A}$ un câmp vectorial oarecare, uniform, S aria unei suprafețe plane dreptunghiulare și $\hat{n}$ vectorul normal la acea suprafață, cu $|\hat{n}| = 1$. Mulțimea tuturor punctelor care formează suprafața se notează Σ .

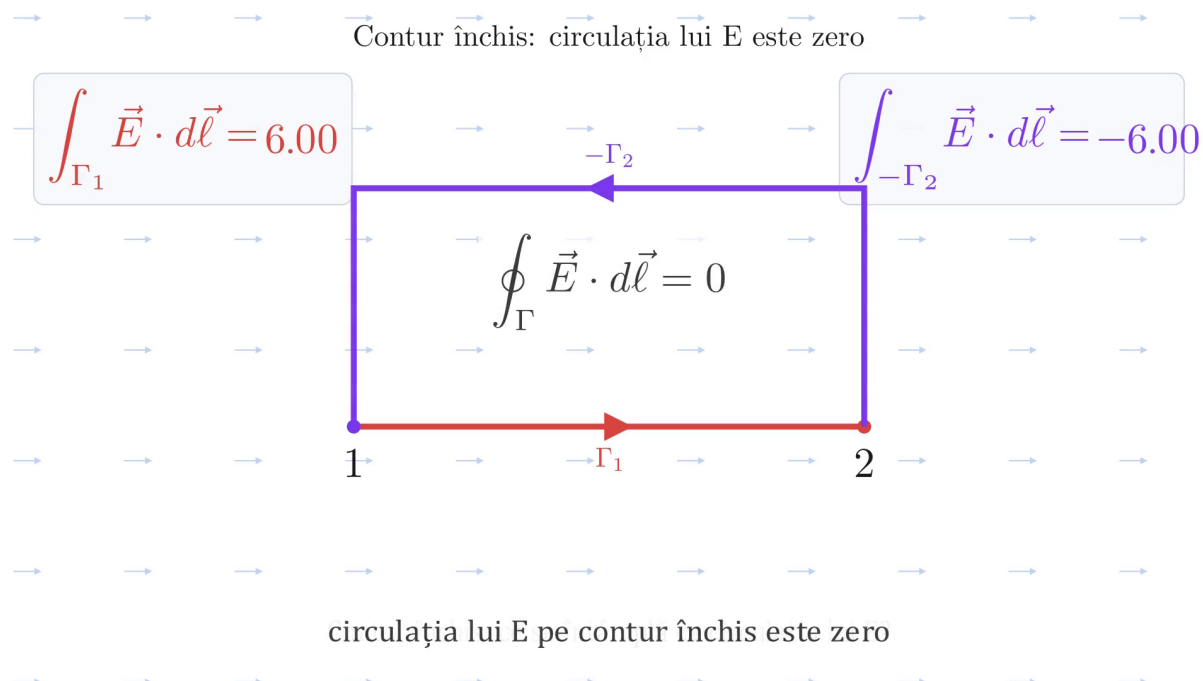


Figura 2: Circulația pe contur închis este zero

Definiție:

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \vec{A} \cdot \hat{n} S \quad (2)$$

(fluxul câmpului de vectori $\vec{A}$ prin suprafața Σ)

Deoarece $\vec{A} \cdot \hat{n} = A \cos \theta$ (unde θ este unghiul dintre $\vec{A}$ și $\hat{n}$), formula devine:

$$\Phi = A \cdot S \cdot \cos \theta.$$

Cazuri particulare

Cazul 1 - suprafață verticală ($\theta = 0$, câmpul perpendicular pe suprafață). Vectorul $\vec{A}$ este paralel cu $\hat{n}$, deci $\cos 0 = 1$:

$$\Phi = A \cdot S \quad (\text{flux maxim}).$$

Cazul 2 - suprafață orizontală ($\theta = 90^\circ$, câmpul paralel cu suprafața). Vectorul $\vec{A}$ este perpendicular pe $\hat{n}$ (paralel cu planul suprafeței), deci $\cos 90^\circ = 0$:

$$\Phi = 0 \quad (\text{flux nul, suprafață orizontală față de câmp}).$$

Acesta este un *punct de anulare* al fluxului, nu minimumul funcției $\Phi(\theta) = A \cdot S \cdot \cos \theta$: pentru θ între 90° și 180° , $\cos \theta$ devine negativ, iar câmpul traversează suprafața în sensul opus normalei $\hat{n}$; minimumul propriu-zis, $\Phi = -A \cdot S$, se atinge abia la $\theta = 180^\circ$.

Cazul 3 - suprafață oblică (unghi α arbitrar).

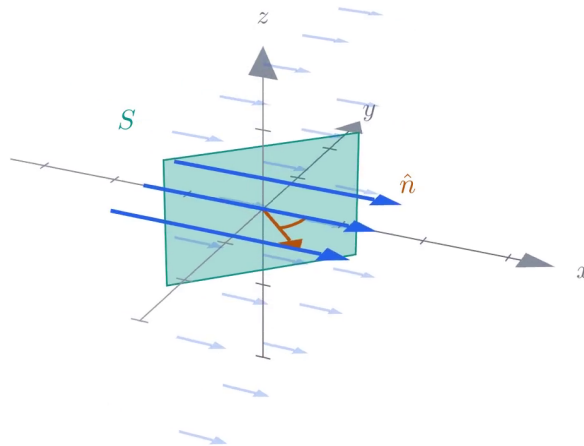
Unghiul α dintre $\vec{A}$ și $\hat{n}$ este același unghi notat θ mai sus, redenumit aici pentru a sublinia că poate lua orice valoare între 0° și 180° - cazurile 1 și 2 sunt doar situațiile extreme $\alpha = 0^\circ$ și $\alpha = 90^\circ$ ale acestei formule generale.

Fluxul printr-o suprafață plană: $\Phi = E S \cos \theta$

$$\Phi = E S \cos \theta$$

$$\Phi = 5.43 \text{ V}\cdot\text{m}$$

$$\theta = 45.0^\circ$$



Suprafața se înclină: fluxul scade cu cosinusul unghiului

Figura 3: Definiția fluxului printr-o suprafață plană

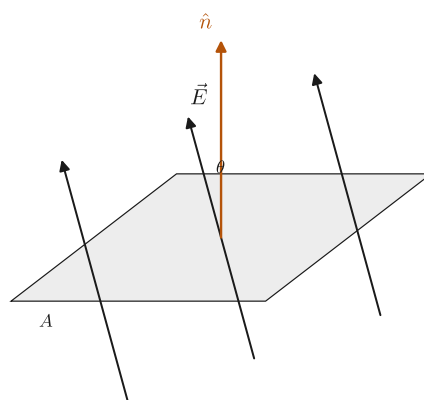
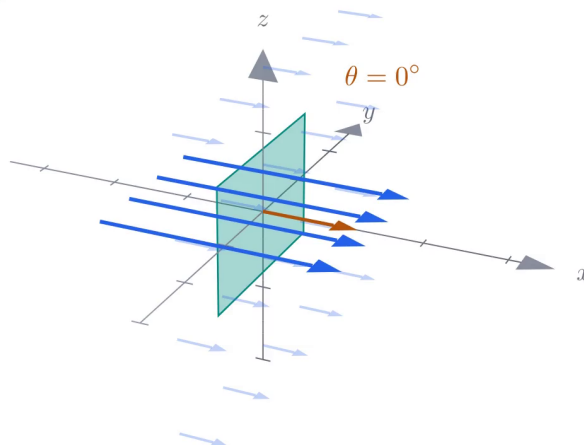


Figura 4: Fluxul câmpului E printr-o suprafață de arie A : contează doar componenta lui E de-a lungul normalei n , adică unghiul dintre E și n .

Flux maxim: normala paralelă cu câmpul $\Phi = E S$

$$\Phi = 7.68 \text{ V}\cdot\text{m}$$
$$\theta = 0.0^\circ$$

$$\Phi = E S \cos 0^\circ = E S$$



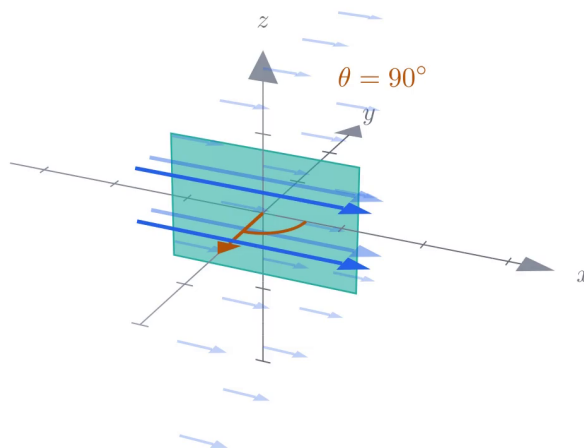
Toate săgețile E străbat suprafața: fluxul este maxim

Figura 5: Flux maxim: suprafață perpendiculară pe câmp

Flux nul: normala perpendiculară pe câmp $\Phi = 0$

$$\Phi = 0.00 \text{ V}\cdot\text{m}$$
$$\theta = 90.0^\circ$$

$$\Phi = E S \cos 90^\circ = 0$$



Nicio săgeată nu străbate suprafața: flux zero

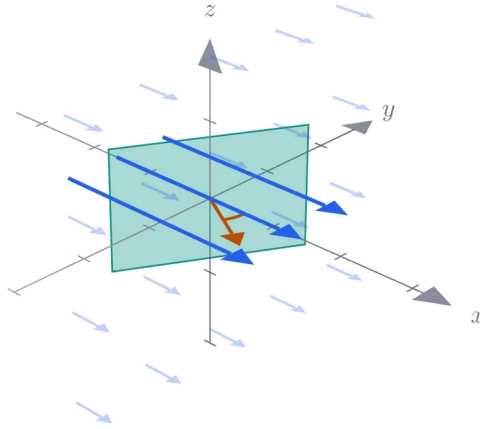
Figura 6: Flux nul: suprafață paralelă cu câmpul

Flux oblic: $\Phi(\alpha) = E S \cos \alpha$

$$\Phi(\alpha) = E S \cos \alpha$$

$$\Phi = 6.65 \text{ V}\cdot\text{m}$$

$$\alpha = 30.0^\circ$$



Formula generală: flux maxim la unghi zero, nul la 90 de grade

Figura 7: Flux oblic: rotirea suprafeței față de câmp

$$\Phi_E = A \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (\text{flux oarecare, suprafață orientată oblic}).$$

Flux printr-o suprafață curbă oarecare

Pe o suprafață curbă Σ , vectorul normal $\hat{n}$ are orientare *diferită în fiecare punct* al suprafeței.

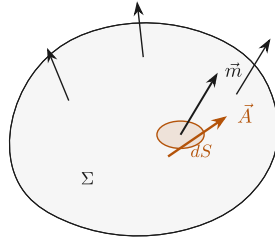


Figura 8: Suprafață curbă Σ cu elementul de arie dS , normala locală $\vec{m}$ și câmpul $\vec{A}$ variabil de-a lungul suprafeței.

Fluxul elementar pe elementul de suprafață dS este:

$$d\Phi_\Sigma = \vec{A} \cdot \hat{n} dS.$$

Prin integrare pe toată suprafața Σ :

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma d\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{A} \cdot \hat{n} dS.$$

Particularizând pentru câmpul electric ($\vec{A} = \vec{E}$), obținem **definiția fluxului câmpului electric printr-o suprafață oarecare**:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Divergența unui câmp vectorial

Fie $\vec{A}$ un câmp vectorial cu componentele carteziene:

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z.$$

Definiție:

$$\operatorname{div} \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$

Exemplu de calcul - divergența vectorului de poziție $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Semnificație fizică: divergența unui câmp vectorial într-un punct P este egală cu limita raportului dintre fluxul net al câmpului printr-o suprafață închisă ce înfășoară punctul P și volumul inclus, când volumul tinde la zero.

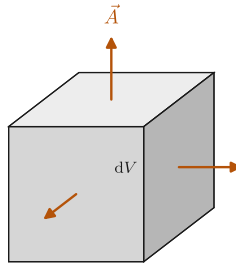


Figura 9: Divergența ca flux net pe unitatea de volum: câmpul A străbate fețele unui volum elementar dV , ieșind în exterior.

Câmpul $\vec{r}/r^3$ - expresie explicită

Vectorul de poziție raportat la distanța la cub este:

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}.$$

Calculăm divergența acestui câmp, derivând fiecare componentă în raport cu propria variabilă. Pentru componenta după x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2x \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}. \end{aligned}$$

Prin simetrie ciclică în x, y, z , celelalte două derivate parțiale au aceeași formă:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$$

Sumând cele trei derivate parțiale, conform definiției divergenței:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\ &= 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0} \quad \text{pentru orice punct cu } r \neq 0.$$

În origine ($r = 0$) câmpul $\vec{r}/r^3$ nu mai este definit - numitorul se anulează -, iar acolo este concentrată o singularitate a divergenței. Rezultatul de mai sus este esențial: divergența nulă în orice punct din afara originii înseamnă că, peste tot cu excepția originii, liniile câmpului $\vec{r}/r^3$ nu apar și nu dispar nicăieri, ci doar traversează fiecare regiune a spațiului fără să se creeze sau să se anihileze. Toată “sursa” câmpului este concentrată exact în origine, acolo unde s-ar afla o sarcină electrică punctiformă. Această proprietate este motivul pentru care legea lui Gauss va funcționa (subiectul cursului următor): fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă depinde exclusiv de sarcina electrică închisă în interior, niciodată de sarcinile aflate în exterior.

Rotorul unui câmp vectorial

Definiție (scriere compactă ca determinant formal):

$$\operatorname{rot} \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Scriere analitică a rotorului (componentele carteziene):

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\operatorname{rot} \vec{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\operatorname{rot} \vec{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}$$

Desfășcând determinantul:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Semnificație fizică: componenta rotorului unui câmp vectorial într-un punct P, după o direcție $\hat{n}$, este egală cu limita raportului dintre circulația câmpului pe un contur mic închis care înconjoară punctul P (situat într-un plan perpendicular pe $\hat{n}$) și aria înconjurată de acel contur, când aria tinde la zero - rotorul este deci o *circulație pe unitatea de arie*. Intuitiv, dacă am plasa o mică paletă (o roată cu palete, ca la o moară de apă) în câmpul $\vec{A}$, ea s-ar roti cu o viteză unghiulară proporțională cu $|\operatorname{rot} \vec{A}|$, în jurul axei indicate de direcția vectorului $\operatorname{rot} \vec{A}$; dacă paleta rămâne nemișcată în orice punct și orientare, câmpul este irotațional.

Produsul vectorial - formulă determinantală

Produsul vectorial al doi vectori oarecare $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ și $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ se calculează identic ca un determinant:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - b_z a_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Componentele explicite:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y,$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - b_z a_x,$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Exemple de aplicabilitate a operatorilor

- $\text{rot } r^3$ - **incorect**: rotorul se aplică unui câmp *vectorial*, nu unui scalar.
- $\text{div } r^2$ - **incorect**: divergența se aplică numai câmpurilor vectoriale, nu scalarilor.
- $\text{grad } r^3$ - **corect**: gradientul se aplică unui scalar și produce un vector.

Rotorul câmpului $\vec{r}/r^3$

Câmpul vectorial:

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

cu componentele:

$$A_x = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$A_y = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$A_z = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Calculăm componenta x a rotorului:

$$\begin{aligned} \left[\text{rot} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= z \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - y \cdot \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= z \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2y - y \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \cdot 2z \\ &= -3yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} + 3yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prin calcule identice (prin simetrie ciclică în x, y, z):

$$\left[\text{rot} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_y = 0, \quad \left[\text{rot} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right]_z = 0.$$

Prin urmare:

$$\boxed{\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{0}.} \quad (3)$$

Câmpul electrostatic este irotațional

Câmpul electric al unei sarcini punctiforme Q plasate în origine este (legea lui Coulomb):

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^3} \vec{r},$$

unde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ este constanta lui Coulomb.

Deoarece $\vec{E}$ este proporțional cu $\vec{r}/r^3$ și am demonstrat că $\operatorname{rot}(\vec{r}/r^3) = \vec{0}$ (ecuația (3)), rezultă că rotorul câmpului acestei sarcini este nul:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}} \quad (\text{pentru câmpul unei sarcini punctiforme}).$$

Rezultatul de mai sus a fost demonstrat pentru câmpul unei singure sarcini punctiforme Q , plasată chiar în originea sistemului de coordonate - dar concluzia rămâne valabilă indiferent unde este plasată sarcina, pentru că originea poate fi mutată oriunde fără să schimbe rezultatul geometric al calculului. Dacă avem un câmp produs de mai multe sarcini punctiforme, fiecare câmp individual are, conform celor de mai sus, rotor nul. Cum operatorul rotor este liniar,

$$\operatorname{rot}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) = \operatorname{rot} \vec{E}_1 + \operatorname{rot} \vec{E}_2 + \dots + \operatorname{rot} \vec{E}_n = \vec{0},$$

rotorul sumei este suma rotorilor, adică tot nul. Prin superpoziție, putem afirma că, indiferent de câte sarcini și cum sunt așezate, **orice câmp electrostatic** - câmpul produs de ansamblul lor - este irotațional, nu doar câmpul unei sarcini izolate.

Teorema lui Stokes leagă cele două forme, integrală (circulația) și diferențială (rotorul), printr-o singură identitate: pentru orice suprafață deschisă Σ mărginită de conturul închis Γ , cu $\hat{n}$ orientat conform regulii mâinii drepte față de sensul de parcurgere al lui Γ ,

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{A}) \cdot \hat{n} dS}$$

adică circulația unui câmp vectorial $\vec{A}$ de-a lungul conturului Γ este egală cu fluxul rotorului său prin orice suprafață Σ care se sprijină pe acel contur.

Aplicând-o câmpului electrostatic, cu $\vec{A} = \vec{E}$, și folosind $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (demonstrat mai sus pentru orice câmp electrostatic), integrala din dreapta se anulează pentru **orice** suprafață Σ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = \iint_{\Sigma} \vec{0} \cdot \hat{n} dS = 0,$$

adică circulația câmpului electric pe orice contur închis Γ este nulă - regăsim exact proprietatea (1), de data aceasta pornind de la forma diferențială (locală, rotorul nul în fiecare punct), nu de la forma integrală (globală) cu care am pornit lecția.

Concluzie: câmpul electrostatic este un *câmp irotațional*. Aceasta este echivalentă cu proprietatea (1): circulația câmpului electric pe orice contur închis este nulă, așa cum am regăsit mai sus cu ajutorul teoremei lui Stokes.